Мысли о математике

Е. Б. Рудный, ©, 2024, blog.rudnyi.ru/ru

Читать онлайн: http://blog.rudnyi.ru/ru/2024/09/mysli-o-matematike.html

Ниже идут мои измышления по поводу, что такое математика. Я не математик, но в моем рассмотрении я буду опираться на то, что сами математики говорят о математике. Математика также являлась необходимым инструментом в моей работе и я начну с двух примеров из моего опыта использования математики. Примеры позволяют сформулировать проблему следующим образом. Есть инструмент, который хорошо работает; вопрос в том, почему и каким образом этот инструмент работает.

Один раз при разработке программы по обработке данных мне потребовалась обратная матрица от блок-диагональной матрицы, когда каждый блок имел сравнительную простую структуру. Аналитические вычисления с матрицами такой структуры небольших размеров навели на мысль о возможности выразить в данном случае обратную матрицу в явном виде и после определенных усилий мне это удалось, чем я до сих пор горжусь.

В большинстве случае я просто использовал результаты, полученные математиками и на этот счет приведу второй пример. В методе конечных элементов получаются системы большой размерности и поэтому требовалось нахождение низкоразмерной аппроксимации передаточной функции для быстрого, но аккуратного решения транзиентных задач на уровне системного моделирования.

Как оказалось, для этого случая математики доказали теорему, согласно которой вычисление подпространства Крылова позволяло эффективно и численно устойчиво находить необходимую аппроксимацию. Мне такая математическая задача была бы не под силу; признаюсь, что я даже не рискнул взяться за проверку доказательства теоремы. Но я смог понять, что теорема, доказанная математиками, именно то, что требуется для решения поставленной задачи и использовал ее при разработке программного решения для инженеров.

В обоих случаях ключевым моментом является математическое доказательство и именно это, по-моему, составляет главную отличительную черту математики. Можно доказать, что из определенных посылок с логической необходимостью следует определенное заключение и таким образом можно установить точное и однозначное соответствие между разными математическими объектами. К этом следует добавить вопрос о связи математики с миром, другими словами, почему полученные выражения удается успешно применять на практике.

Подход Успенского и чистая математика

Начну с рассмотрения подхода к доказательству в книге Успенского '*Апология математики*'. Успенский исходит из того, что математическое построение невозможно начать с определений и что поэтому в основе математики лежат неопределяемые исходные понятия:

> 'при дефиниционном способе одни понятия определяются через другие, другие – через третьи и т. д. Но ведь мы не можем продолжать этот процесс бесконечно. А значит, на каких-то геометрических понятиях мы вынуждены остановиться и далее их не определять. Эти понятия, которые уже не имеют определения, называют неопределяемыми, или исходными.'

Поэтому Успенский говорит, что смысл исходных понятий проясняется только в системе аксиом:

> 'Тогда поступим так. Попытаемся выписать основные свойства этих понятий, а именно те свойства, на которые будем опираться в наших рассуждениях. Дадим себе обещание не использовать в рассуждениях никаких иных свойств, кроме тех, которые внесены нами в список основных свойств. Каждый отдельный элемент списка, в котором фиксированы какие-то определённые свойства рассматриваемых понятий, будем называть аксиомой, сам же список – системой аксиом.'

При этом Успенский подчеркивает, что для математика неважны используемые слова для исходных понятий. В качестве примера Успенский приводит четыре аксиомы с выдуманными словами и утверждает, что для математика это не должно быть препятствием при проведении доказательств:

> '(1) Для каждых двух куздр существует бокр, которого они будлают.
> (2) Две различные куздры не могут будлать вместе более одного бокра.
> (3) Существуют три куздры, для которых нет такого бокра, которого все они будлают.
> (4) Каждого бокра будлают по меньшей мере две куздры.'

> 'Что такое куздры, бокры, будлать, оставляется неразъяснённым. Оказывается, однако, что разъяснения и не требуются для выведения из этих утверждений определённых заключений, т. е. таких, которые непременно являются истинными при условии истинности всех четырёх исходных посылок. Убедимся, например, что (5) два различных бокра не могут одновременно быть будлаемы более чем одной куздрой. В самом деле, если бы таких куздр было две, то они совместно будлали бы двух наших бокров, что запрещено утверждением (2). Для собственного

> развлечения читатель может доказать, например, такой факт: (6) для каждых двух куздр найдётся такая третья куздра, что нет бокра, которого будлали бы все эти три куздры.’

Успенский обосновывает свою позицию тем, что математическое построение должно быть оторвано от окружающего нас мира:

> ‘Ведь математические объекты, в отличие от объектов физических, не присутствуют в природе, они существуют лишь в умах людей. Поэтому в применении к математическим истинам говорить, что истина – это то, что соответствует реальному положению вещей, можно лишь с большой натяжкой.’

Другими словами, математика не есть физика, поэтому при проведении доказательств с математическими объектами нельзя опираться на сходство математических объектов с чем-то реальным, а следует опираться исключительно на внутреннюю логику, заданную системой аксиом.

В целом позиция Успенского понятна. Можно сказать, что это ответ на вопрос, что такое математика, в рамках чистой математики. В то же время становится непонятным статус математических построений в таком духе, а также их связь с миром.

История математики: возникновение чистой математики

Рассмотрим кратко историю математики, поскольку история вопроса поможет лучше понять возникновение позиции Успенского. Ниже изложение истории по книге Мориса Клайна ‘*Математика. Утрата определенности*‘. Отмечу, что название книги связано с критикой Клайном чистой математики.

Дедуктивное доказательство в духе геометрии Евклида считалось идеалом достоверного знания. В качестве примера был взят философ Томас Гоббс, который познакомился с геометрией в 40 лет. Он увидел теорему Пифагора, которая показалась ему неверной, но при внимательном чтении доказательства он понял, что теорема правильная. Это настолько поразило философа, что он впоследствии старался всегда вести аргументацию в духе дедуктивного доказательства.

Клайн в книге обращает внимание, что развитие арифметики, алгебры, введение отрицательных и комплексных чисел, разработка аналитической геометрии, анализа и многих других областей математики в отличие от геометрии не было связано с дедуктивными доказательствами. Развитие этих математических идей было вызвано практическими нуждами, а обоснованием их правильности служило скорее успешное использование полученных «рецептов» при решении практических задач.

Можно сказать, что развитие математики за исключением геометрии шло путем естественных наук — раз работает, то значит все правильно — и такое положение дел продолжалось до второй половины девятнадцатого века. Клайн отмечает, что работа физика и математика после научной революции семнадцатого века практически совпадала; считалось, что согласно крылатым словам Галилея требовалось понять книгу природы, написанную на языке математики. Записывались уравнения движения планет, гидродинамики, теплопроводности, электростатики. Далее решение этих уравнений находилось на интуитивном уровне, а дедуктивные доказательства в духе геометрии Евклида были невозможны в связи с отсутствием необходимой системы аксиом.

Клайн характеризует ситуацию таким образом:

> ‘К началу XIX в. математика оказалась в весьма парадоксальной ситуации. Ее успехи в описании и предсказании физических явлений превзошли самые смелые ожидания. Но при этом многие математики еще в XVIII в. отмечали, что все огромное здание математической науки было лишено логического фундамента и держалось на столь шатких основаниях, что не было уверенности в «правильности» этой науки. Подобная ситуация сохранялась и в течение всей первой половины XIX в.’

Поворотным пунктом стало открытие неевклидовых геометрий. Существование неевклидовых геометрий означало, что математические истины перестали быть истинами о мире — геометрий много, а мир один. Вполне можно сказать, что это обстоятельство привело к окончательному отделению математики от физики. Другое поворотное открытие, которое отмечается в книге Клайна — это кватернионы. Операции с ними не коммутативны; это привело к осознанию, что в зависимости от интерпретации алгебраическое выражение может быть как истинным, так и ложным.

> ‘На протяжении двух тысячелетий математики были уверены в том, что весьма успешно открывают математические принципы, заложенные в фундаменте мироздания. Но в середине XIX в. они вынуждены были признать, что глубоко заблуждались, принимая математические законы за абсолютные истины.’

Математики согласились с таким положение вещей и это обстоятельство дало им свободу рассматривать математические структуры согласно внутренней логики без связи с требованиями физики. На первое место вышло доказательство внутренней непротиворечивости математики и поэтому вторая половина девятнадцатого века была ознаменована поиском дедуктивных доказательств во всех областях математики. Поиск оснований был омрачен парадоксами теории множеств, но далее в конце девятнадцатого — начале двадцатого века сложились четыре основные конкурирующие программы основания математики: логицизм, интуиционизм, формализм, теоретико-множественное направление. Клайн описывает сложившуюся ситуацию так:

> ‘Итак, к тридцатым годам XX в. сложились четыре различных, так или иначе конфликтующих подхода к математике, и сторонники различных направлений, не будет преувеличением сказать вели между собой ожесточенную борьбу. Никто не мог более утверждать, что такая-то и такая-то теорема доказана правильно: в 30-е годы непременно следовало пояснить, каким стандартам правильности удовлетворяет данное доказательство.’

С другой стороны, в целом сложившаяся ситуация оказалось продуктивной:

> ‘Оглядываясь назад, можно сказать, что состояние оснований математики в 30-е годы XX в. было вполне удовлетворительным. Парадоксы были разрешены, хотя каждая из школ в основаниях математики решала их по-своему. Правда, не существовало единого мнения относительно того, какую математику надлежит считать правильной, но каждый математик мог выбрать подход, наиболее отвечающий его вкусам, и действовать в соответствии с принципами, которых придерживались сторонники данного направления.’

Краткая история выше позволяет лучше понять позицию Успенского — строгость математических построений не должна зависеть от ссылок на мир. Вернемся к геометрии; изначально ее построение основывалось на идеализации пространственных форм. Основные понятия геометрии — точка, линия, плоскость — связывались с идеализированными объектами мира и в этом заключалось отличие от подхода Успенского; понятия, используемые при формулировке аксиом, формировались независимо от аксиом.

Успенский в этом случае использует термин пояснение. В его рассмотрении связь с идеализированными объектами мира поясняет используемое понятие, но не более. Математические доказательство должно опираться исключительно на систему аксиом и не должно ссылаться на что-то, связанное с интуицией на основе пояснения.

Требование формальности и отказа от интуиции в целом понятно, поскольку интуиция может подвести. Например, аксиома параллельности изначально казалось естественной идеализацией пространственных отношений. Именно поэтому признание возможности существования разных геометрий потребовало пересмотра отношения к базовым понятиям. Идеализация реальных объектов оказалась не таким простым делом и полагаться на интуицию стало опасно. Таким образом, подход Успенского опирается на урок, полученный в ходе исторического развития математики.

Математические структуры в чистой математике

Рассмотрим вопрос о статусе математических объектов чистой математики, проблематику которого передает еще одно высказывание Успенского:

> ‘Нередко утверждают, что математику следует рассматривать как часть физики, поскольку она описывает внешний физический мир. Но с тем же успехом её можно считать частью психологии, поскольку изучаемые в ней абстракции суть явления нашего мышления, а значит, должны проходить по ведомству психологии.’

Обычная формулировка вопроса — являются ли эти объекты изобретениями математиков или открытиями того, что существовало само по себе. В этом контексте вспомним кредо Галилея. Если книга природы написана на языке математики, то это подразумевает, что математики открывают уже существовавшие структуры и как следствие ожидается единственность и уникальность того, что открывается.

В случае связи математических структур с результатом идеализации и абстрагирования чего-то реального, еще остается надежда на выполнение идеала Галилея. Хотя в этом случае вопрос существования таких объектов по сути дела будет аналогичен вечной проблеме универсалий, которая принадлежит к вечным проблемам и сводится к тому, что философы при ее обсуждении занимают ту или иную философскую позицию (номинализм, концептуализм, реализм и т.д.).

В случае позиции Успенского даже такая связь с миром теряется. Появляется представление о чистой математике, а использование математики для решения практических задач относится к прикладной математика. В книге Клайна резко критикуется чистая математика, а идеалом для Клайна остается использование математики для познания мира, то есть, Клайн подчеркивает важность связи математики с решением реальных проблемам. Я нахожу такое требование чрезмерным; решение, заниматься ли исключительно математическими построениями или же искать сотрудничества с представителями других наук, в конечном итоге является выбором математика.

Вернемся к вопросу о статусе математических структур в рамках чистой математики без связи с миром. С моей точки зрения более разумно в этом случае говорить о конструировании новых структур, а не о открытии чего-то уже существующего. Это подчеркивает в том числе существование разных подходов для обоснования математики.

Опасение при такой формулировке, по всей видимости связаны с введением доли субъективности; мало ли что человек может себе вообразить. Однако процесс, представленный Успенским полностью объективен — доказательство, проведенное таким образом, будет либо истинным, либо ложным, либо не будет соответствовать критериям доказательства. В этом отношении в идеале доказательства по Успенскому нет ничего, связанного с психологией в смысле субъективности, поскольку сформулированные правила не допускают разногласий.

Также вряд ли следует надеяться на нахождение единственно правильного способа обоснования. Приведу пример с анализом. Во второй половине 19-ого века сложился стандартный анализ, когда бесконечно малое трактовалось в виде предела при использованием числовой оси из действительных числе. В 60-ых года 20-ого века был разработан нестандартный анализ, когда удалось использовать трактовку бесконечно малого как отдельного объекта среди действительных чисел. Как пишут, тем самым была исполнена мечта Лейбница, который представлял себе бесконечно малое именно таким образом.

Таким образом в настоящее время есть две формулировки анализа, при этом с практической точки зрения разницы нет — используемые уравнения на практике остаются без изменения. Отличие между стандартным и нестандартным анализом состоит в обосновании на уровне чистой математики. Вряд ли в этом случае можно сказать, что математики открыли стандартный и нестандартный анализ. По-моему, этот пример говорить именно о конструировании строгого математического обоснования. Важно отметить, что он показывает, что хотя строгое обоснование может быть проведено разными способами, это не ведет к потере объективности, а также с практической точки зрения ведет к одному и тому же результату.

Другое возражение с использованием 'конструирование' вместо 'открытие' связано с тем, что на этом пути математика превращается в своеобразную игру. В данном случае обоснование цели таких построений является внутренним делом математиков. Это они должны сказать, в чем заключается цель чистой математика, когда разорвана всякая связь возводимых структур с миром.

Математическое доказательство и интуиция

Некоторая парадоксальность чистой математики связана с тем, что с одной стороны, формализация доказательства, представленная Успенским, делает доказательство полностью механическим. Так, в настоящее время существует немало программ для автоматического проведения аналитических вычислений в символьном виде. Вполне возможно, что вычисление обратной матрицы в первом примере в настоящее время может быть проведено в одном из таких программ; было бы интересно это проверить. С другой стороны, невозможно представить себе развитие чистой математики без математиков; крайне сомнительно, что будет разработано программное обеспечение, которое бы смогло доказать необходимую теорему во втором примере вместо математиков.

Эта проблема неплохо рассмотрена в книге Стивена Кранца '*Изменчивая природа математического доказательства. Доказать нельзя поверить*'. В ней рассмотрена история и практика проведения доказательств математиками. Требование к доказательствам менялись по ходу времени и Кранц полагает, что в будущем требования также могут несколько поменяться. Кранц считает, что в центре математики по-прежнему лежит традиционное доказательство (аксиомы и теоремы). Просто рассматриваемые проблемы стали сложнее, а доказательства длиннее; также появились новые взгляды:

> ‘Как мы уже говорили в начале книги, доказательство — это психологический инструмент, позволяющий убедить другого человека в истинности чего-либо. Если вместо «другого человека» поставить слова «математика с традиционным образованием», то скорее всего, желательное доказательство — традиционное. Логические аргументы в евклидовом стиле. Если же вместо «другого человека» окажется «специалист по современному численному анализу», то его скорее убедит длинное и очень точное компьютерное вычисление.’

С другой стороны, математика остается творческим занятием; Кранц по этому поводу пишет таким образом:

> ‘Не следует думать, что построение математических доказательств — процесс механический, это вовсе не так. Математик, как и любой другой ученый, открывает идеи интуитивно. Он просто «видит» или «чувствует», что какое-то утверждение истинно, основываясь на опыте и озарении, развиваемых годами.’

Сказанное выше не отменяет требования строгости к проведению доказательства, но это показывает, почему не следует ожидать прорыва со стороны формальных доказательств на уровне искусственного интеллекта. Формально из системы аксиом можно получить очень много правильных утверждений, но далеко не все из них вызывают интерес. Поэтому первая задача заключается в формулировке интересной математической проблемы, доказательство которой следует провести (см., например, второй приведенный мною пример в начале заметки). Насколько я понимаю, невозможно сформулировать эту задачу формально, поэтому использование искусственного интеллекта на этом этапе даже не стоит на повестке дня.

Другая проблема связана с уровнем формальной строгости, поскольку доказательство для реальной проблемы на уровне формальной строгости математической логики потребует неимоверное количество шагов. В книге Кранца упоминался результат Адриана Матиаса по подсчету числа шагов, необходимых для определения числа один в системе Бурбаки. Приведу по этому поводу цитату из статьи с выразительным названием ‘*Термин длиной 4 523 659 424 929*‘ (см. раздел ‘*Определение единицы в четыре терабайта*‘):

> ‘Бурбаки предполагал, что для его определения числа 1 будет достаточно нескольких десятков тысяч символов. Мы показали, что эта оценка существенно занижена, поскольку необходимое количество символов равно 4 523 659 424 929, не включая 1 179 618 517 981 ссылок для устранения неоднозначностей (disambiguatory links).’
>
> [См. обсуждение с alaev. Он связывает такое большое число с tau-оператором, который использовал Бурбаки и который в настоящее время не используется.]

В книге Кранца возможности искусственного интеллекта характеризуются как достаточно ограниченные:

> ‘Программы искусственного интеллекта — это попытка научить компьютер решать задачи, с которыми справляется человек. В этом направлении имеется значительный прогресс, но они все еще довольно элементарны. Они даже не начали приближаться к мощи и глубине чего-либо подобного доказательству Уайлса Великой теоремы Ферма.’

Приведу еще одну показательную цитату из книги Кранца:

> ‘В наши дни практически все математики используют компьютеры для работы с электронной почтой, для написания статей и книг и размещения материалов в Интернете. Значительное число (все же заметно меньше половины) математиков используют компьютер для проведения экспериментов. … Но подавляющее большинство (академических) математиков, в конце концов, вооружаются ручкой и записывают доказательство. А потом его публикуют.’

P.S. В обсуждении nikital2014 указал, что похожее видение доказательства можно найти у Успенского. В ‘*Семь размышлений на темы философии математики*‘ (входит в книгу ‘*Апология математики*‘) в шестом разделе ‘*Что такое доказательство?*‘ Успенский вначале рассматривает формальное доказательство, которое строго определено, а затем переходит к обычному доказательству. В этом случае Успенский замечает:

> ‘Итак, термин «доказательство» — один из самых главных в математике — не имеет точного определения. А приблизительное его определение таково: доказательство — это убедительное рассуждение, убеждающее нас настолько, что с его помощью мы способны убеждать других.’

Затем в разделе рассматривается история математики с этой точки зрения.

Математика и мир

В заключение вернусь к вопросу, каким образом построения чистой математики оказываются связанными с практикой. Отмечу, что в моих примерах в самом начале шла речь про математику, важную именно для практических приложений. В прикладной математике связь чистой математики с миром достигается в ходе поиска подходящих математических структур при идеализации / абстрагировании объектов. Например, в геометрии слова точка, линия, и плоскость относятся к идеализации пространственных структур мира.

Отмечу важность естественного языка для координации математических структур и мира в случае в случае прикладной математики. Например, переход от прямой линии к геодезической на уровне естественного языка не вызывает особых проблем, просто несколько меняется точка зрения. В этой связи приведу пару высказываний из книги Манина ‘*Математика как метафора*‘ про естественный язык. Интересно, что в одном месте Манин резко критикует естественный язык, но далее он признает важность использования естественного языка даже в математике:

> ‘Но почему же тогда наши научные статьи по-прежнему выглядят как неорганизованная смесь слов и формул? Отчасти потому, что мы по-прежнему нуждаемся в этих эмоциональных связях; отчасти же потому, что некоторые значения (например, содержание ценностных суждений) лучше всего выражаются на естественном языке. Однако естественный язык имеет некоторые внутренние преимущества даже и как средство выражения научной речи: апеллируя к пространственному и качественному воображению, он помогает понимать такие «структурно устойчивые» свойства, как число свободных параметров (размерность), существование экстремумов, симметрии. Грубо говоря, он позволяет использовать науку как метафору.’
>
> ‘Эта открытость естественного языка является исключительно важным резервом его творческого использования не только в поэзии и философии, но и в науке. Для выражения вновь возникающего смысла может быть использован ранее неосмысленный текст («волна вероятности» в квантовой механике или более прозаический «пакет молока»). Еще интереснее факты рождения нового смысла из ранее неосмысляемых, хотя и грамматически допустимых языковых выражений (поэтические метафоры; континуальные интегралы Фейнмана).’

История математики показывает, что многие математические структуры в современной чистой математики были найдены для решении практических задач. В этом отношении процесс аксиоматизации можно представить себе как обратную задачу — было необходимо выбрать систему аксиом исходя из требований к математическим структурам со стороны приложений.

С другой стороны, аксиоматизация дала возможность для построения математических объектов, которые изначально никак не были связаны с прикладными задачами. Эти математические структуры выходили за уровень обычной интуиции, но со временем появлялось понимание, что они также могут быть использованы при идеализации объектов мира. Можно даже сказать, что упорядочение математических структур в рамках аксиоматизации способствовало развитию интуиции.

Тем не менее, история математики показывает, что не следует воспринимать слова Галилея о книге природы на языке математики в буквальном смысле слова. Определенные математические структуры можно использовать для эффективного решения практических задач, но из этого не следует, что мир эквивалентен математическому объекту. Приведу пример с континуумом. Механика сплошных сред и транспортные уравнения основаны на использовании континуума, но мы знаем, что на наноуровне эти уравнения не работают. Другими словами, несмотря на то, что континуум можно эффективно использовать при описании вещества в масштабах обыденной жизни, мы знаем, что вещество не представляет из себя континуум.

Важно отметить, что квантовая механика и даже теория струн завязаны на математические структуры, связанные с континуумом. По-моему, в этом есть определенный парадокс — теория физики для описания дискретных событий основана на математике континуума. По всей видимости это также говорит о том, что не следует воспринимать уравнения квантовой механики в буквальном смысле слова. Можно эффективно использовать математические структуры квантовой механики для решения практических задач, но из этого не следует, что абсолютно все математические особенности теории найдут соответствие в мире.

Информация

В. А. Успенский, *Апология математики*, 2017.

Определение понятия в математике и в жизни

Морис Клайн, *Математика. Утрата определенности*, 1984.

Морис Клайн: Математика. Утрата определенности

Стивен Кранц, *Изменчивая природа математического доказательства. Доказать нельзя поверить*, 2020.

Изменчивая природа математического доказательства

Mathias, Adrian RD. *A Term of Length 4 523 659 424 929*. Synthese 133, no. 1 (2002): 75-86.

Математика — разное: Раздел ‘*Определение единицы в четыре терабайта*‘

Ю. И. Манин, ‘*Математика как метафора*‘, 2014

Ю. И. Манин о науке и языке

Обсуждение

https://evgeniirudnyi.livejournal.com/379738.html

Часть 2. Реальность математики

В. Я. Перминов в статье ‘*Реальность математики*‘ хочет избежать дилеммы между двумя крайностями — конвенционализмом и платонизмом в математике. Он связывает математические инварианты с деятельностью человека и тем самым выделяет арифметику и евклидову геометрию как базовые структуры математики. Мне понравилось рассмотрение математики со стороны деятельности, но я не согласен с выводами. Ниже вначале приведены несколько цитат из статьи, а затем идет мое обсуждение.

Характеристики двух крайних позиций в статье Перминова:

> ‘Многие современные философы склонны думать, что математические объекты – лишь мысленные конструкции и, в отличие от объектов физических, не связаны каким-либо обязательным отношением к реальности. Считается, что, обладая логической определенностью, они не имеют отношения к отражению свойств и отношений реального мира. … Это точка зрения конвенционализма и конструктивизма.’

> ‘Однако уже со времен пифагорейцев и Платона существует другое, прямо противоположное воззрение на природу математических объектов. Математические объекты, по крайней мере, такие как числа и фигуры понимаются не как конструкции разума, а как отражение глубинных форм окружающего нас мира. … Это точка зрения платонизма или математического реализма.’

Далее Перминов говорит, что современная математика утратила связь с реальностью:

> ‘Можем ли мы говорить о реальности новой математики в том же смысле, в котором Платон и Лейбниц говорили о реальности арифметики и евклидовой геометрии? Очевидно, что для утвердительного ответа на эти вопросы нет оснований. Новые математические теории не строятся на интуитивно ясных принципах и по условиям своего зарождения они не могут претендовать на описание мира в каком-либо смысле. … Новые математические теории строились преимущественно из логических соображений. … Ясно, что такое чисто логическое расширение математического знания не содержит в себе никакой гарантии его реальности.’

Следующий шаг — практика как критерий реальности:

> ‘Мы должны признать, что практика является не только основой универсальных норм, но и основным индикатором реальности. Реально то, что выделено деятельностью и возведено на уровень интерсубъективности. Предметная структура мира реальна, ибо она выделена коллективной деятельностью. Предметные подразделения обладают высшей реальностью, ибо подтверждены всей совокупностью человеческой практики. Никакого другого критерия реальности у нас нет.’

Отсюда по Перминому следует реальность арифметики и евклидовой геометрии:

> ‘Эти соображения подводят нас к пониманию реальности арифметики. Априорность арифметики не означает, что понятие числа имеет свои

> истоки в разуме. Для того чтобы в мире был счет, мир должен быть в какой-то мере дискретным сам по себе, безотносительно к деятельности счета. … Арифметика реальна, ибо отражает в себе аспект дискретности мира, существенный для деятельности.’
>
> ‘Мы должны понять праксеологическую природу геометрических идеализаций, а именно тот факт, что исходные представления евклидовой геометрии порождаются не опытом и не физическими представлениями о движении, а универсальной деятельностной онтологией мышления. … Евклидова геометрия является исключительной геометрией, она является онтологически означенной или онтологически истинной.’

Приведу еще одну цитату из заключения статьи:

> ‘Приведенные здесь соображения показывают возможность некоторого концептуального продвижения в понимании математического реализма. Мы приходим к осознанию того факта, что логика, арифметика и евклидова геометрия – не простые непротиворечивые математические структуры, а структуры, имеющие онтологический фундамент. Это структуры, необходимые для всякого мышления, структуры априорные и одновременно фундаментально реальные.’

Перминов — профессиональный философ и в статье он опирается на такие термины как реальность, сознание, мышление, чувственное восприятие, интерсубъективность, онтология и др. Видно, что он защищает определенную философскую позицию и что его аргументы идут в ходе сложившегося противопоставления разных философских позиций. Я бы сказал, что речь в статье идет о вечных вопросах: что такое человек, что такое реальность и как можно отличить представления человека о реальности от самой реальности.

Я признаю важность философских размышлений по этому поводу, но, по-моему, все упирается в разные представления, связанные с метафизикой — что действительно существует. При обсуждении математики с точки зрения деятельности вполне достаточно ограничиться минимальной философской позицией, в который вечные вопросы останутся замороженными. Поэтому я возьму главную идею из статьи Перминова — связь с практикой, но в последующем рассмотрения останусь на уровне повседневной / обыденной жизни и буду использовать значения слов человек и реальность на уровне здравого смысла; для рассмотрения деятельности человека такого уровня должно быть вполне достаточно.

Рассмотрим в качестве примера строительство моста. В данном случае противопоставление крайних позиций, озвученных Перминовым, теряется. Мост одновременно является конструкцией, содержит элементы конвенциональности и в то же время является реальным. Требования к надежности моста объединяет вместе конструкционизм, конвенционализм и реализм. Мост должен быть надежным и выдерживать ожидаемую нагрузку, но в то же время мост должен соответствовать требованиям архитектуры.

Теперь рассмотрим план моста и планирование процесса строительства. План моста в определенном смысле реален, но его реальность отличается от реальности построенного моста. Нельзя исключить, что построенный по существующему плану мост не выдержит ожидаемую нагрузку и развалится. Тем не менее, на уровне здравого смысла такое отличие в реальности между планом моста и самим мостом вполне понятно и не требует особых разъяснений. Деятельность требует планирования, планирование реально, но не каждый план приводит к успеху.

План моста связан с идеализацией / абстрагированием. В этой заметке я перепрыгну через идеализацию, связанною с физикой (вопрос прочности моста) и перейду сразу же к математике. Например, в случае планирования возведения моста в том числе встает вопрос о количестве необходимых материалов для строительства моста; таким образом возникает практическая необходимость в счете и геометрии. В этом смысле идея Перминова понятна — арифметика и геометрия возникают как результат подобных практических вопросов. Тем не менее, между арифметикой, геометрией и практической деятельностью есть достаточно большой разрыв, связанный с введением бесконечности.

При построение геометрии и арифметики интуиция человека на основе практической деятельности не дает однозначного разрешения вопросов в отношении бесконечности. В качестве примера рассмотрим аксиому параллельности в форме следующего вопроса. Сколько прямых можно провести в плоскости через данную точку, которые не пересекут данную прямую? В евклидовой геометрии, реальность которой отстаивает Перминов, говорится о единственной прямой в этом случае.

Не думаю, что можно связать этот вывод с практической деятельностью, поскольку человек не сталкивается на практике с бесконечными прямыми. Можно попытаться вообразить бесконечные прямые, но воображения как такового недостаточно для их однозначной характеристики. В данном случае ответ ‘только одна такая прямая’ по всей видимости является самым простым, но не более того. Например, представим себе, что геометрия осталась бы без аксиоматизации до времени активной работы над картографией Земли. В этом случае непонятно, какова была бы интуиция прямой у картографов и как бы они ответили на поставленный вопрос.

Похожие проблемы возникают в арифметике. Например, при рассмотрении натурального ряда есть вопрос о сравнении числа квадратов чисел с числом всех натуральных чисел. Квадраты чисел составляют подмножество всех натуральных числе и поэтому их должно было бы быть меньше. С другой стороны, у каждого натурального числа есть свой квадрат. Таким образом переход к бесконечности требует принятия решений за границами обычной интуиции.

Другой переход к бесконечности связан с введением иррациональных чисел. На первый взгляд они появляются в результате практических операций с квадратом — измерение диагонали квадрата показывает, что она несоизмерима со стороной квадрата. На самом деле идеальный квадрат уже является идеализацией, а вопрос о существовании идеального квадрата заводит в дебри метафизики. На практике иррациональные числа невозможно получить в силу ограниченной точности измерений. Таким образом, подход со стороны деятельности в лучшем случае приводит к представлению длины в виде интервала из двух рациональных чисел.

В то же время происходящее понятно с точки зрения деятельности и здравого смысла. Люди обладают способностью к идеализации, а далее ищутся логические / математические соотношения между идеализированными объектами. В этом отношении проблемы бесконечности рассматриваются на уровне логики, а не на уровне интуиции.

Перминов, по всей видимости, связывает конвенционализм и конструктивизм с полным разрывом между математическими построениями и миром и поэтому он обращается к арифметике и евклидовой геометрии для устранения этого разрыва. В моей позиции математика рассматривается как инструмент для работы с идеализациями, возникающими при решении практических задач. Я не вижу проблемы в том, что по ходу развития математики были найдены разные способы создания необходимого инструментария.

Я не считаю, что в этом случае необходим поиск непосредственных инвариантов между математикой и миром, как это утверждается в выводах статьи Перминова. В рамках деятельности требуется лишь успешное применения разработанных математиками средств на практике. Так, в примере с мостом требуется, чтобы планирование количество материалов для строительства моста оказалось правильным.

По-моему, в статье Перминова смешалось историческое развитие математики, в котором евклидова геометрия и развитие арифметики сыграли особую роль, с использование математических инструментов на практике. Более правильно говорить не о непосредственной связи между математическими структурами и миром, а о использовании математических структур при описании идеализаций, которые использует человек при планировании деятельности.

При рассмотрении математики важно отметить связь интуиции с образованием. Интуиция в связи с аксиомой параллельности в евклидовой геометрии вырабатывается в ходе решения геометрических задач. Я не специалист в области образования, но не вижу причин, почему нельзя представить другой путь математического образования, в котором интуиция, связанная с неевклидовыми геометриями, вырабатывается с самого начала.

В целом, по-моему, лучше говорить не о реальности, а об объективности математики. Математика связанна с использованием доказательств, которые однозначно связывают разные идеализированные объекты друг с другом. Со стороны доказательств объективность математики не вызывает сомнений. В то же время успех практической деятельности возможен при использовании несколько отличающихся друг от друга идеализаций. Это обстоятельство сохраняет разрыв между математикой и миром, но не вижу причин почему следует его бояться. Такой разрыв не мешает успешному использованию математики как инструмента на практике; так, возможны разные конструкции мостов, одинаково надежных в использовании.

Информация

В. Я. Перминов, *Реальность математики*. Вопросы философии 2 (2012): 24-39.

Обсуждение

https://evgeniirudnyi.livejournal.com/380854.html

Дополнительная информация

Гёделево утверждение без математики: Качественное объяснение теоремы Гёделя — по мотивам статьи Джона Финдли. Самореферентное утверждение, которое демонстрирует, что оно недоказуемо. Майкл Полани о рассмотрении Финдли.

Кантор: Бесконечность и теология: Мои впечатления от книги Амира Ацеля '*Мистерия Алефа: Математика, Каббала и поиск бесконечности*'. Второй раздел '*Кантор: Теория множеств как откровение*'. Приведена цитат Кантора по книге Катасонова.

Математика — разное: Небольшие истории, связанные с математикой. Несколько заголовков — Абсурдность абсурдности. Магия числа 6174. Как выглядит первый миллион натуральных чисел? Самый успешный способ бегства от реальности.

2 + 2 = 4? Короткие истории. Несколько заголовков — Рене Декарт: 2 + 2 = 4 или всемогущество Бога? Достоевский о дважды два четыре. Почему дважды два четыре? Истина истине рознь. Поэты любят дважды два четыре.

1 + 2 + 3 + 4 + … = -1/12: Информация о равенстве, которое связано с дзетой функции Римана zeta(-1). Даны ссылки на обсуждения этого равенства с другими пользователями ЖЖ.